



Universidad
Zaragoza

Trabajo de Fin de Grado

Detección de materia oscura axiónica con microlensing

Alejandro Sáinz

Director: Javier Redondo

Facultad de ciencias
2019/2020

Índice

1. Introducción.	1
2. Axiones y miniclusters.	1
2.1. Realineamiento del vacío.	2
2.2. Miniclusters.	3
3. Microlensing.	4
3.1. Estimación del número de eventos.	7
4. Miniclusters como lentes gravitatorias.	8
4.1. Magnificación en el régimen de óptica ondulatoria.	8
4.2. Óptica geométrica. Aproximación de punto silla.	9
4.2.1. Estimaciones del radio de difracción y de Einstein.	10
4.2.2. Cálculos geométricos para el caso puntual.	11
4.3. Miniclusters como lentes dispersas.	12
4.3.1. Ecuación de la lente difusa.	12
4.3.2. Perfil 'core'.	12
4.3.3. Perfil isoterma.	15
4.3.4. NFW.	15
4.3.5. Comparación con lente puntual.	18
4.3.6. Sumario.	21
4.3.7. Estrategia general para cualquier perfil.	23
5. Conclusiones.	23

1. Introducción.

La materia oscura es uno de los componentes del universo conocido. Actualmente conforma el 25 % de la energía de este, y no es similar en propiedades ni a la materia bariónica ni a los neutrinos. Su nombre tiene origen en que, a diferencia de la materia a la que estamos acostumbrados, es completamente transparente a la radiación electromagnética. Su existencia pudo comprobarse a través de las diferentes interacciones gravitatorias que tiene con la materia, ya que está presente a lo largo de todo el universo, bañando los distintos cúmulos de galaxias, las propias galaxias y el resto de objetos celestes. Esto provoca distintos efectos en la expansión del universo o la interacción gravitatoria de estos cuerpos.

La materia oscura estará formada por partículas desconocidas no contempladas en el modelo estándar. Todos los posibles candidatos tienen en común que no interactúan con la materia ordinaria ni consigo misma, como han evidenciado a lo largo de los años diversos estudios y experimentos para intentar detectarla. Algunos de estos son el WIMP, los neutrinos estériles, gravitinos y el axión, entre otros muchos. Durante el desarrollo de este trabajo vamos a centrarnos en los axiones.

El axión es una partícula hipotética predicha por Weinberg y Wilczek que tiene una doble función: por un lado es un posible candidato a materia oscura, y por otro explicaría por qué las interacciones fuertes son invariantes bajo transformaciones de paridad e invariancia temporal, que no es requerido por la estructura Gauge del modelo estándar, sino que sale como un accidente. Esto es el conocido como *strong CP problem*.

Dado que la materia oscura es muy débilmente interactuante, cabe preguntarse si es posible detectar algún tipo de interacción gravitatoria y de su estudio poder descartar candidatos. En el caso particular del axión, que resulta prácticamente imposible de detectar en experimentos, bajo ciertas condiciones dará lugar a unas estructuras masivas que se conocen como *axion miniclusters* (MCs), que consisten en agrupaciones de enormes grupos de estas partículas, con masas típicas del orden de $10^{-13}M_{\odot}$. En este rango de masas puede emplearse la técnica de microlensing gravitatorio.

El microlensing consiste en el fenómeno de amplificación de la luz proveniente de una fuente lejana al acercarse a la línea de visión un objeto masivo, que produce una deflexión de los rayos de luz, actuando como una lente. Esta técnica se usó en su momento para el estudio de los agujeros negros primordiales como posible materia oscura, observándose M31 con el telescopio Subaru y también la Nube de Magallanes por la colaboración EROS. Aunque sin éxito, por la similitud de masas entre este candidato y los miniclusters, estos experimentos podrían ser sensibles también a los axiones.

Estudios previos por Fairbairn, Marsh et. al. [6] han estudiado esta posibilidad, aunque tomando aproximaciones muy optimistas respecto a las características de los miniclusters. Con el conocimiento actual y mediante distintas simulaciones podríamos refinar estos resultados, obteniendo estimaciones más fiables.

En este trabajo estudiaremos las características más relevantes para la detección de MCs con microlensing. Comenzaremos con las características típicas de tanto los axiones como los MCs en la sección 2, el formalismo general de microlensing en la sección 3, describiremos los MCs como lentes gravitatorias en 4 y finalmente se presentarán las conclusiones obtenidas.

2. Axiones y miniclusters.

El axión es una partícula hipotética que nace de la teoría creada para explicar por qué las interacciones fuertes, descritas por la *cromodinámica cuántica* (QCD), son simétricas bajo conjugación de paridad e inversión temporal. Trata entonces de resolver el *strong CP problem*, que consiste en que aunque en principio QCD viola tanto la paridad como la inversión temporal, experimentalmente este hecho no se ha observado nunca.

El parámetro que controla estas violaciones es un ángulo θ , para el cual no hay restricciones en su valor. La no observación de un momento dipolar eléctrico para el neutrón [7] fuerza a considerar que $\theta < 10^{-10}$.

Perci y Quinn sugieren que θ es sustituido por un campo dinámico $\theta(t, x)$, para el que QCD asocia una energía potencial con un mínimo en $\theta \sim 0$, dando el valor esperado por las observaciones del párrafo anterior. A las excitaciones de este campo alrededor del mínimo Weinberg y Wilczek le asociaron una nueva partícula: el axión.

En particular, para hacer que θ sea un campo normalizado canónicamente, se define una nueva escala de energía f_a , de forma que la mayor parte de los aspectos del axión estarán marcados por dicha escala. Ejemplo de esto son los acoplos con otras partículas del modelo estándar, tal que $g_{Ap} \propto 1/f_a$ o su propia

masa, que puede escribirse como:

$$m_A \approx 0,6 \text{ eV} \frac{10^7 \text{ GeV}}{f_a} \quad (1)$$

Es a partir de estos acoplamientos con la materia junto a los trabajos experimentales que podemos restringir los valores de f_a , y como consecuencia la masa del axión. Algunas de estas ligaduras experimentales son las siguientes [8]:

1. Si $m_a > 1 \text{ MeV}$, este decaería rápidamente en un par $e^- - e^+$, hecho que no se ha observado experimentalmente.
2. Gracias a los 'Beam dumps', mediante el estudio de los procesos que deberían producir axiones en estos, podemos descartar $m_a > 50 \text{ keV}$.
3. Gigantes rojas: la existencia del axión provocaría una aceleración de la evolución estelar, ya que estos pueden escapar de la estrella sin sufrir re-scattering (a diferencia de los fotones), por la poca interacción entre ellos. Esto no es compatible con la evolución observada en el cosmos, en particular en las gigantes rojas, de forma que:

$$m_a \notin [0,5 \text{ eV}, 200 \text{ keV}]$$

4. Las supernovas se enfrían mediante la emisión de neutrinos, de forma que se restringe la masa del axión porque de lo contrario se enfriarían por la emisión de estos:

$$m_a \notin [3 \cdot 10^{-3}, 2] \text{ eV}$$

Esto finalmente nos da un límite a las constantes de acoplo, que según la expresión de la masa indicada anteriormente se traducen en restricciones a la masa. Así:

$$f_a < 10^{12} \text{ GeV} \quad m_a < 3 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \quad (2)$$

Algunos de los experimentos en los que se han confirmado estas restricciones han contado con la participación de la Universidad de Zaragoza, tales como los realizados por IAXO o MADMAX:

- IAXO, siglas de *Internacional Axion Observatory* es un helioscopio de axiones, cuyo objetivo es detectar los axiones emitidos por el Sol.

Mediante un campo magnético suficientemente fuerte es posible inducir la conversión de estos axiones en fotones, que son fácilmente detectables. Su diseño conceptual se recoge en [1].

Este proyecto es el sucesor de CAST (*CERN Axion Solar Telescope*). En ambos estuvo involucrada la Universidad de Zaragoza como una de los colaboradores principales, encargándose un grupo de investigadores del diseño de los detectores de bajo fondo de rayos X colocados en los focos de los telescopios, entre otras cosas.

- MADMAX es un proyecto nacido en el Max-Planck-Institut, cuyo objetivo es encontrar evidencia experimental de la existencia de materia oscura axiónica. Funciona de forma muy similar a IAXO, y es que se aplica a los axiones un campo magnético. Empleando una serie de dieléctricos, puede detectarse una señal característica de estos axiones, que gracias al campo magnético se comportan parcialmente como fotones, emitiéndose microondas en la superficie de los dieléctricos.

La Universidad de Zaragoza es uno de los colaboradores de este proyecto, entre otras 7 entidades.

2.1. Realineamiento del vacío.

La materia oscura axiónica se produce por el mecanismo de *realineamiento del vacío*. La idea es que el campo del axión requiere un determinado tiempo para poder reaccionar a su potencial asociado.

Dado que el potencial es despreciable y, por tanto, la masa del axión también, en este momento su campo se corresponde con un campo relativista. Las condiciones iniciales del campo serán entonces valores aleatorios en el intervalo angular $[-\pi, \pi]$, puesto que no hay valores privilegiados del campo al ser despreciable el potencial.

Las inhomogeneidades en el campo decrecen al entrar en el horizonte causal, y de esta forma la longitud de correlación del campo del axión será del tamaño de este horizonte mientras el campo sea relativista.

Cuando la masa del axión se hace comparable al tiempo del Universo, la interacción con el potencial comienza a dominar la dinámica del campo. Esto ocurre a un tiempo t_1 . El campo del axión se comporta entonces como un conjunto de osciladores armónicos amortiguados, lo que se muestra en la siguiente ecuación:

$$(\partial_t^2 + \frac{3}{2t}\partial_t + \frac{k^2}{R^2})A(k, t) \quad (3)$$

Siendo $A(k, t)$ las componentes de Fourier del campo del axión A . Vemos entonces que el coeficiente de amortiguamiento es el tamaño del horizonte causal, $1/t_1$.

Dado que la amplitud del campo varía entre $[0, \pi]$, esperamos tener una distribución de materia oscura muy inhomogénea a partir de distancias comóviles $L_1 = t_1(z_1 + 1)$, siendo $z_1 = z(t_1)$. Podemos hacer ahora una serie de estimaciones para los distintos parámetros en t_1 , partiendo de la expresión para la masa de un axión a $T \neq 0$, dada por [8]

$$m_a(T) = 4 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \frac{10^{12} \text{ GeV}}{f_a} \left(\frac{\text{GeV}}{T} \right)^4 \quad (4)$$

Hemos dicho que para t_1 el tiempo del universo y la masa del axión son comparables, de forma que la condición es $m_A(t_1)t_1 = 1$. Es sencillo hacer una estimación de este tiempo a partir de la masa del axión. A partir de la relación entre la constante de Hubble actual y la del tiempo t_1 puede obtenerse el redshift, y también el tamaño del horizonte. Tomando un valor de $f_a = 10^{11} \text{ GeV}$ tenemos

t_1 (s)	$\sim 4 \cdot 10^{-7}$
H_1 (s^{-1})	$\sim 2 \cdot 10^6$
z_1	$\sim 10^{13}$
L_1 (m)	$\sim 10^2$

Como último comentario, ha de notarse que hemos omitido otra posibilidad para la evolución del campo del axión. Si las condiciones iniciales de este se fijan antes de la inflación, la densidad de materia oscura se homogeniza perfectamente en todo el universo, con ciertas particularidades. Esto se conoce como escenario *pre-inflacionario*, y no se tratará más en este trabajo porque no se forman MCs, de forma que asumiremos un escenario *post-inflacionario*.

2.2. Miniclusters.

Una vez llegamos al tiempo t_1 la densidad de axiones decrece con $1/a(t)$, siendo $a(t)$ el factor de escala. Sin embargo, el contraste, definido como

$$\delta = \frac{\rho(r) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (5)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad promediada espacialmente, prácticamente no cambia mientras el universo está dominado por radiación. En torno a $z \sim 4000$, cuando domina la materia oscura, este contraste puede evolucionar, ya que las zonas más densas pueden colapsar gravitacionalmente dando lugar a MCs.

Supongamos una región de radio conforme rL_1 y contraste δ , que colapsará para dar lugar a un MC. La masa de estos MCs no cambiará a medida que evolucione el sistema:

$$M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} (1 + \delta) (rL_1)^3 \quad (6)$$

Buscaremos el radio de virialización del MC (aquel en que se ha estabilizado gravitacionalmente), ya que podemos asumir que este será la mitad del radio máximo de expansión que ha tenido (punto que denominamos como *turn around* (TA)), de forma que la densidad final será 8 veces la obtenida en el punto máximo de expansión.

Partiendo de una zona de radio r con masa en su interior con un cierto contraste ϕ , la ecuación de expansión del radio de esta zona viene dada por:

$$\ddot{r} = -\frac{8\pi G}{3} \rho_r - \frac{GM_{TOT}}{r^2} \quad (7)$$

Siguiendo el desarrollo de [5] se deduce que la densidad final de un MC es típicamente (suponiendo $\phi = 1$):

$$\rho_{MC} \approx 9 \cdot 10^{-14} (\Omega h^2)^4 g \cdot \text{cm}^{-3} \quad (8)$$

Y tomando el valor del producto $\Omega h^2 \sim 0,147$, se tiene que $\rho_{MC} \sim 4,2 \cdot 10^{-17}$.

Y el momento en que el radio de expansión es máximo tiene un redshift dado por:

$$a_{TA} = 0,69 \cdot a_{EQ} \rightarrow z_{TA} \sim 4350 \quad (9)$$

Y a partir de aquí se deduce que la masa típica de un MC es del orden de $\sim 10^{-13} M_\odot$. Podríamos obtener un radio asumiendo la densidad del MC constante y dada por (8), pero este sería erróneo, pues los perfiles de densidad de MCs son muy diferentes.

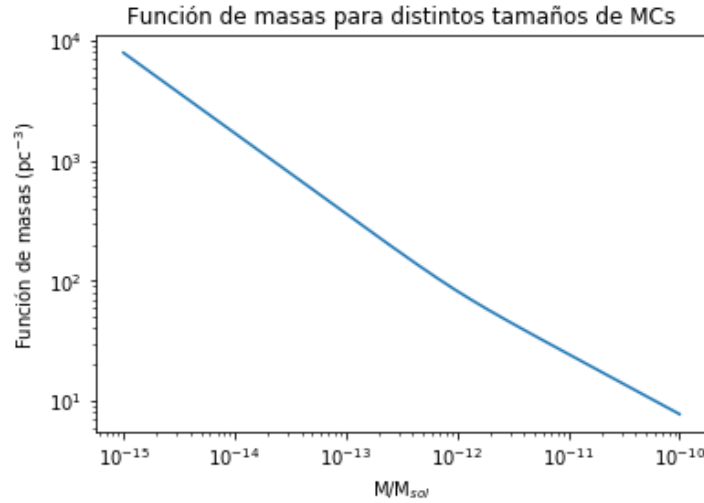
Podemos hablar ahora de la función de partición de estos MCs respecto a su masa, que indica la abundancia de estos en función de M . Un estudio reciente de Eggemeier et al, basado en simulaciones de colapso gravitatorio de MCs a partir de ciertas condiciones en un tiempo t_1 predice la siguiente función de masas:

$$\frac{d\bar{n}}{d \log_{10} M} = \frac{K}{pc^3} \left(\frac{M}{M_b} \right)^{-0,5} \left(\frac{M^2}{M_b^2 + M^2} \right)^{\frac{\alpha_1 + 0,5}{2}} \exp \left(-\frac{M}{M_*} \right) \quad (10)$$

donde

$$M_b = 10^{-12} M_\odot, \quad \alpha_1 = -0,67, \quad \log(M_*/M_\odot) = -14,30, \quad \log K = 4,35$$

Este resultado es aplicable para $M \geq 10^{-15} M_\odot$ y se puede extender desde redshift $z = 100$ hasta hoy. Lo que nos dice esta función es que es más común tener miniclusters de masas menores, tal y como se ve en la siguiente gráfica:



La densidad de MCs en una región con un contraste cualquiera δ será entonces $dn = (1 + \delta)d\bar{n}$.

Por último comentar que puede estimarse la densidad de materia oscura promedio en nuestra galaxia con un perfil NFW, tal que

$$\bar{\rho}(r) = \frac{\rho_0}{r/r_s(1 + r/r_s)^2} \quad (11)$$

con $r_s \approx 12,5$ kpc.

Gracias a esto podemos establecer una relación entre la masa de los MCs y su radio, ya que podemos considerar que la masa de un MC es la masa de una esfera de radio r_c con densidad 180 veces la densidad promedio:

$$\int_0^{r_c} \rho(r) dV \approx \frac{4\pi}{3} r_c^3 \cdot 180 \bar{\rho} \quad (12)$$

3. Microlensing.

El *gravitational microlensing* es la amplificación temporal de la luminosidad de una determinada fuente no resoluble al pasar un objeto (que conoceremos como lente) a través o cerca de la línea de visión entre la fuente y nuestro punto de observación.

Se conocía desde la época de Newton la capacidad de la materia para cambiar la trayectoria de la luz por efectos gravitatorios. Einstein sentó las bases en 1936 de lo que se conocería posteriormente como

microlensing, y la primera observación de este efecto vino en 1979 de la mano de K. Chang y S. Refsdal [2].

Lo que observaron estos científicos fue un sistema de dos cuásars que estaban a la misma distancia de la Tierra y poseían las mismas propiedades, estando separados por 16 arcosegundos. Posteriormente descubrieron que no se trataba de dos cuásars, sino de uno solo, y lo que se veía eran dos imágenes causadas por la distribución de materia que estaba presente en la línea de visión desde la Tierra.

Una campaña de microlensing consiste entonces en monitorizar la luminosidad de un número N de estrellas durante un determinado tiempo. En un intervalo Δt_{min} se integra la luminosidad que recibimos y esto continúa durante un tiempo t_{medida} , registrando las variaciones de dicha luminosidad.

Dado que si las variaciones de la luminosidad ocurren en un tiempo muy pequeño respecto Δt_{min} o mayor que t_{medida} no las detectaremos correctamente, interesa observar un gran número de estrellas al mismo tiempo, aunque tratando de no saturar nuestro receptor; de ahí que se evite apuntar a centros de galaxias.

Cualquier evento estará determinado por la curva de luminosidad (más bien amplificación de esta respecto a la situación sin lente) en función del tiempo. Querremos un tipo de evento de microlensing concreto, de unas determinadas características. En particular, buscaremos una amplificación mínima de $\mu_{min} = 1,34$ entre Δt_{min} y t_{medida} , siguiendo el mismo criterio que [3]. solo superando este umbral de amplificación podremos decir que una MC ha causado un evento.

El esquema de una situación cualquiera de microlensing se resume en la siguiente imagen:

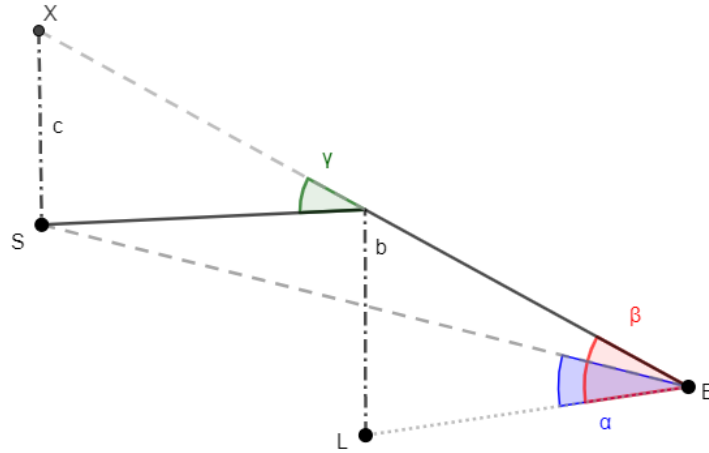


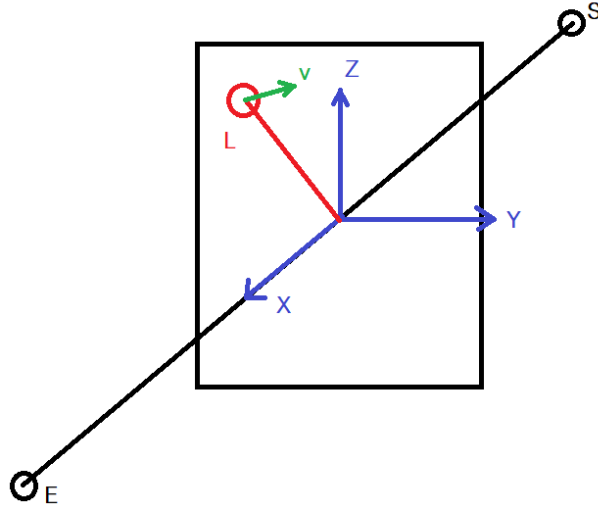
Figura 1: Esquema de lensing por una lente L. Debe notarse que los ángulos de la figura son muy superiores a los reales y no son representativos de la situación real.

Donde:

- γ se conoce como el ángulo de deflexión, y representa el ángulo que se inclinan los rayos al llegar al plano de la lente, suponiéndolos rectos el resto del trayecto.
- α es el ángulo que forma la lente (L) con la línea de visión (E-S).
- β es el ángulo que forman las imágenes de la fuente dadas por la lente con la línea de visión.
- b representa la distancia entre las imágenes formadas y la línea de visión.
- Denotamos como $d(EL)$, $d(ES)$ y $d(LS)$ las distancias entre Tierra-Lente, Tierra-Fuente y Lente-Fuente, respectivamente.

Lo que nos interesará será conocer la amplificación en función del ángulo α , pues es lo que observaremos en una campaña real de microlensing.

En la situación en la que estemos suficientemente cerca de la línea de visión E-S cualquier evento podrá parametrizarse con dos cantidades: la distancia de mínimo acercamiento a la línea de visión (b_{mn}) y la velocidad en el plano de la lente, v_{plano} . Esto puede verse en la siguiente imagen:



Tendremos la posición inicial del MC en este plano, dada como $\vec{x}_0 = (0, y_0, z_0)$ y la velocidad, que tomamos inicialmente con componentes en las 3 coordenadas. Pasado un tiempo t , tendremos:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \cdot t = (v_x t, y_0 + v_y t, z_0 + v_z t) \quad (13)$$

De forma que el ángulo:

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{d}{d(EL) - v_x t} = \frac{|\vec{x} - (v_x t, 0, 0)|}{d(EL) - v_x t} \quad (14)$$

Y si consideramos que la distancia $d(EL) \gg v_x t$ tenemos:

$$\alpha = \frac{d}{d(EL)} \left(\frac{1}{1 - v_x t / d(EL)} \right) \approx \frac{d}{d_{EL}} \quad (15)$$

Por lo que siempre que se cumpla esa condición bastará con tener en cuenta la velocidad en el plano. Podemos entonces cambiar el sistema de referencia en la coordenada temporal, tomando como origen el tiempo de máximo acercamiento, es decir, t_m tal que $b(t_m) = b_{mn}$.

En este tiempo en el plano de la lente se verifica que el vector posición es perpendicular a la velocidad. Sabiendo esto y que podemos reducir el problema a este plano:

$$\vec{x}_m \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow y_m v_y + z_m v_z = 0 \quad (16)$$

$$\sqrt{v_y^2 + v_z^2} = |\vec{v}_{plano}| = |\vec{v} - \vec{v}_x| \quad (17)$$

Así:

$$v_z = -\frac{y_m v_y}{z_m} \rightarrow v_p^2 = v_y^2 + \left(-\frac{y_m v_y}{z_m} \right)^2 \rightarrow v_y^2 = \frac{v_p^2}{1 + y_m^2 / z_m^2} ; v_z^2 = \frac{v_p^2}{1 + z_m^2 / y_m^2} \quad (18)$$

Dado que estamos considerando un plano tendremos dos posibilidades de perpendicularidad, y bastará con saber cuál de las dos es la que se da para conocer la evolución del sistema solo a partir del módulo de la velocidad en el plano. Una vez hecho esto la evolución será:

$$\alpha \approx \frac{d}{d(EL)} \quad d = |\vec{x} - \vec{0}|$$

Donde:

$$\vec{x} = \vec{x}_m + \vec{v}_{plano} \cdot (t - t_m)$$

Además de estos dos parámetros, también tendremos que conocer la distribución de masa de la lente (en nuestro caso, MCs). Asumiremos también que tienen simetría esférica y están bien virializados. Finalmente se tendrá:

$$\mu = \mu(d(ES), d(EL), \rho(r), b, t, v_{plano})$$

Tal y como hemos mencionado antes, habrá un cierto valor de α para el que la amplificación será notable. Esto nos permite definir un cuerpo de revolución, con un radio variable $R_{MC}(x)$, conocido como *tubo de Einstein*, de forma que si el MC entra dentro de este cuerpo tendremos un evento. Así, puede estimarse el número de eventos producidos en función de la cantidad de MC que entran en dicho volumen en un intervalo de tiempo t_{medida} .

3.1. Estimación del número de eventos.

Una vez definido el concepto de tubo de Einstein podemos escribir el ratio diferencial de eventos, el decir, el número de eventos por intervalo de tiempo unidad, de la siguiente manera:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{32d(EL)u_T^4}{\hat{t}^4 v_c^2} \int_0^\infty \left(\frac{dn}{d\delta} \int_0^\infty \frac{\psi(M)}{M} \left[\int_0^1 \rho(x) R_{MC}^4(x, \delta) e^{-Q(R_{MC})} dx \right] dM \right) d\delta \quad (19)$$

Y a partir de aquí el número esperado de eventos se tiene sencillamente integrando este ratio al tiempo de observación con un factor ϵ , que marca la eficiencia del detector usado, y multiplicando todo ello por la exposición (E) del instrumento:

$$N_{esp} = E \int_0^\infty \frac{d\Gamma}{dt} \epsilon(\hat{t}) d\hat{t} \quad (20)$$

Procedemos entonces a explicar brevemente cada uno de los términos que aparecen en la ecuación (19):

1. \hat{t} es el tiempo que le cuesta a nuestra lente atravesar el tubo de Einstein, y para el número de eventos habrá que integrar a todos sus valores posibles.
2. $Q(x) = 4R_{MC}^2(x)u_T^2/(\hat{t}^2 v_c^2)$, $u_T \approx 1$ y representa el mínimo parámetro de impacto para dar amplificación notable, y v_c es la velocidad circular local.
3. $R_{MC}(x, \delta)$. Este es el radio del tubo de Einstein para el minicluster, y depende de dos parámetros principalmente: el contraste δ y el cociente $x = d(EL)/d(ES)$, es decir, la geometría del sistema. Se puede expresar como un factor \mathcal{R} por el de una lente puntual R_E .

En los casos el que el MC sea extremadamente poco masivo ($\delta < \delta_{mn}$), el tubo de Einstein tendrá $\mathcal{R}_{MC} \rightarrow 0$, de forma que no contribuirán al número de eventos. Esto es equivalente al α mínimo necesario para considerar un evento.

4. Suponemos que tenemos un halo de materia oscura donde hay MCs con una distribución de masas determinada. De esta forma tendremos que incluir la densidad proyectada en la línea de visión de este halo $\rho(x)$, que es un factor más que interviene en la probabilidad de tener un evento.
5. $dn/d\delta$ representa la función de partición de δ , es decir, el número de MC con contraste entre δ y $\delta + \delta(\delta)$ por intervalo unidad. Debemos considerar todas las situaciones posibles, lo que implica integrar a todos los valores de δ teniendo en cuenta esta función de partición.

Nos interesaría que esta función de partición fuera mayor en los MC con más contraste, ya que si tuviéramos el caso contrario apenas se tendrían eventos, pues como hemos mencionado antes $\mathcal{R} \rightarrow 0$.

6. $\psi(M)$ representa la función de masas de los MC, que es el análogo para M de la función de partición del punto anterior. Tendremos que integrar a todos los valores de masa disponibles teniendo en cuenta su abundancia en forma de $\psi(M)$ para hacer bien el cálculo. De nuevo, exactamente como en el punto anterior, buscamos miniclusters más masivos, ya que sino su amplificación estará suprimida, como veremos posteriormente.

Se aprecia que esta fórmula depende tanto de factores geométricos intrínsecos al propio sistema (como $d(EL)$, v_c ...) como de las características de los miniclusters y sus formas típicas.

4. Miniclusters como lentes gravitatorias.

Buscaremos, como hemos comentado en un principio, tratar de estudiar eventos de microlensing provocados por MCs. Para analizar estos eventos tendremos que conocer la amplificación típica a esperar, estudiando primero el formalismo teórico.

La notación será la misma que en secciones anteriores, en particular igual a la figura 1.

4.1. Magnificación en el régimen de óptica ondulatoria.

Pasamos a estudiar la amplificación de la luminosidad para un evento. En el límite en que los campos gravitatorios son pequeños ($\phi \sim GM/r \ll 1$) se tiene que $\mu = |F|^2$, donde la función F viene dada según [4] por:

$$F = \frac{\Omega}{2\pi i \beta_E^2} \int d^2 \vec{\beta} e^{i\omega \Delta t} \quad (21)$$

Donde $\vec{\beta}$ representa el vector 2D angular correspondiente a la posición de las imágenes formadas respecto de la línea que une la Tierra y la lente (E-L), de forma que la integral se realiza en el plano de la lente a todos los valores posibles de estos ángulos. Δt es el *time delay*, cuya fórmula general es:

$$\Delta t = \frac{d(ES)d(EL)}{d(LS)} \left(\frac{1}{2} |\vec{\beta} - \vec{\alpha}|^2 - \psi(\vec{\beta}) \right) \quad (22)$$

Pueden distinguirse dos componentes en este, correspondientes con cada uno de los términos: una geométrica, que como indica su nombre viene marcada por las características de la geometría del sistema, y otra potencial, causada por la interacción gravitatoria de la luz con el campo de la lente.

Una vez introducido el time delay podemos definir Ω como el producto $\omega \Delta t$, siendo ω la frecuencia de la luz involucrada en el evento.

Finalmente, $\psi(\vec{\beta})$ es el *potencial gravitatorio proyectado* en el plano de la lente, que puede interpretarse como un potencial de lensing gravitatorio. Este potencial verifica la ecuación de Poisson proyectada a lo largo de la línea de visión, de forma que podemos escribirlo como:

$$\psi(\vec{\beta}) = 8\pi G \frac{d(EL)^2}{\Omega} \int d^2 \vec{\beta}' \log |\vec{\beta} - \vec{\beta}'| \sigma(\vec{\beta}') \quad (23)$$

Siendo $\sigma(\vec{\beta})$ la densidad proyectada en el plano de la lente:

$$\sigma(\vec{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho \left(r = \sqrt{z^2 + |d(EL)\vec{\beta}|^2} \right) \quad (24)$$

Si solo tenemos en cuenta el término geométrico del time delay, la amplificación queda:

$$F = \frac{\Omega/\beta_E^2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega\beta^2/2\beta_E^2} d\beta = \frac{\Omega}{2\pi i \beta_E^2} \sqrt{\frac{2\beta_E^2}{\Omega}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\Omega}{2\pi i \beta_E^2} \sqrt{\frac{2\pi\beta_E^2}{\Omega}} e^{i\pi/4} \quad (25)$$

Y obtenemos que $|F| = 1$. Tendremos en general oscilaciones violentas, salvo una región esférica en que no cancelan entre sí. Esta región tendrá un radio del orden de $\sim 1/\sqrt{\Omega/\beta_E^2}$, y la definiremos como:

$$\beta_d \equiv \frac{1}{\sqrt{\Omega/\beta_E^2}} \quad (26)$$

A partir de ahora conoceremos a esta cantidad como el *radio de difracción*. Y es esa zona la que nos da amplificación, que está suprimida a 1, fuera de la cual es 0. Esto no nos es suficiente, pues hemos fijado el límite inferior para un evento como 1.34. Con esta nueva escala podemos renormalizar la integral de la magnificación (21), de forma que queda:

$$F = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \vec{x} e^{i|\vec{x}-\vec{y}|^2/2} e^{-ix_E^2 \psi(\vec{x})} \quad (27)$$

Donde:

$$x \equiv \frac{\beta}{\beta_d} \quad x_E \equiv \frac{\beta_E}{\beta_d} \quad y \equiv \frac{\alpha}{\beta_d} \quad (28)$$

La componente potencial del time delay nos da una fase suave pasado un determinado punto, de forma que este sería capaz de focalizar los rayos de forma indefinida si no tuviéramos otra contribución, dando una magnificación divergente.

Al combinar ambas componentes ocurre que las zonas de violentas oscilaciones características de la componente geométrica se combinan con las de fase suave y el resultado final es una magnificación finita y posiblemente mayor que 1, siempre que la contribución gravitatoria siga siendo relevante para $\beta > \beta_d$. Dado que las integrales son extremadamente complejas, introducimos a continuación una forma de simplificarlas: la *aproximación de punto silla*.

4.2. Óptica geométrica. Aproximación de punto silla.

La integral para el valor de F con las dos componentes del time delay queda como:

$$F = \frac{1}{2\pi} \int x dx d\phi e^{i(x^2 - 2xy \cos \phi + y^2)/2} e^{-ix_E^2 \psi(x)} = \int x dx J_0(xy) e^{ix^2/2} e^{-ix_E^2 \psi(x)} \quad (29)$$

Donde $J_0(xy)$ es una función de Bessel. Lo que esperamos es que todos los factores del integrando sean capaces de suprimir la divergencia que nos da el factor x , procedente del término potencial.

Tomando un valor de $y \rightarrow 0$, es decir, la lente en una posición cercana a la línea de visión, tal que $\beta \rightarrow \beta_E$ se tiene que F depende solo de x_E , y no tenemos divergencias:

$$y \rightarrow 0 \implies |F| \simeq (1 + (\sqrt{\pi} x_E)^3)^{1/3} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_E < 1 \\ \sqrt{\pi} x_E & \text{si } x_E > 1 \end{cases} \quad (30)$$

Podemos deducir entonces que necesitaremos MCs que verifiquen $x_E > 1$.

Sabemos que la fase geométrica pasado un determinado punto (β_d) oscila cada vez más rápido, destruyendo la amplificación, mientras que la potencial se vuelve suave, creciendo logarítmicamente. La combinación de ambas debe darnos una región en que ambas se suman de forma constructiva, y tenemos ahí el origen de la amplificación, pudiendo despreciar el resto de la integral.

Esos puntos, que son los que marcan la amplificación del sistema, son los *puntos silla*. Podemos tener uno o varios, dependiendo de las características de nuestra lente en particular. De esta forma la integral se puede aproximar a un sumatorio sobre los distintos puntos silla del sistema:

$$F = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \vec{x} e^{i|\vec{x}-\vec{y}|^2} e^{\frac{-ix_E^2 \phi(\vec{x})}{2}} \approx \sum_s \frac{1}{2\pi} \int dx_{\parallel} dx_{\perp} e^{i\phi_s + i\frac{\phi''_{\parallel}}{2}(x-x_s)_{\parallel}^2 + i\frac{\phi''_{\perp}}{2}(x-x_s)_{\perp}^2} \approx \sum_s \frac{e^{i\phi_s}}{\sqrt{\phi''_{\parallel} \phi''_{\perp}}} \quad (31)$$

Donde ϕ es la función que representa la fase de la integral anterior, y el subíndice s indica que está evaluada en el punto silla. Los subíndices \parallel y \perp indican que estamos considerando la dirección en que el ángulo α está definido o la perpendicular, respectivamente. Estos puntos pueden obtenerse sencillamente de:

$$\vec{\nabla} \phi(\vec{x}_s) = 0 \rightarrow \vec{x}_s - \vec{y} - x_E^2 \psi'(\vec{x}_s) \frac{\vec{x}_s}{x_s} = 0 \quad (32)$$

Esta ecuación puede verse que se corresponde con la *ecuación de la lente de la óptica geométrica*, ya que podemos escribir el ángulo de deflexión de la luz (γ en la figura 1) como $\gamma = \beta - \alpha$.

Gracias a este resultado también podemos dar una interpretación física a β_E . Cuando $\alpha = 0$, se verifica que $\beta = \beta_E$. Lo que se formará entonces no serán 2 o más imágenes separadas, sino un anillo de imágenes de radio β_E en torno a la línea de visión. Esto nos dará un valor de amplificación en un principio grande, aunque finito, de magnitud dependiente de β_E .

Para el caso de la lente puntual tenemos dos puntos silla, dados por las soluciones de la ecuación de la lente como:

$$x_{s,+} = \frac{y}{2} + \sqrt{x_E^2 + \frac{y^2}{4}} \quad x_{s,-} = \frac{y}{2} - \sqrt{x_E^2 + \frac{y^2}{4}} \quad (33)$$

Y vemos que la aproximación de punto silla se corresponde con un tratamiento de óptica clásica, que simplificará notablemente el procedimiento.

Cada una de estas imágenes lleva asociada un valor de β y una amplificación, y pueden separarse en el caso límite en que la fase cambie extraordinariamente rápido en torno a ellas, es decir, $\omega \Delta t \rightarrow \infty$. Así:

$$\mu = |F|^2 \rightarrow \langle |F|^2 \rangle \sim |F_+|^2 + |F_-|^2$$

En el caso de no verificarse esto habrá que tener en cuenta las interferencias entre rayos, que podrán ser constructivas o destructivas.

La condición para que la fase cambie rápidamente en torno al punto silla se traduce en que $\beta_s \gg \beta_d$, puesto que en ese caso hemos visto que la componente geométrica oscila violentamente. En el caso en que $\beta_s \ll \beta_d$ tendremos que la amplificación está suprimida a 1, hecho que las fórmulas geométricas no reflejan correctamente. Para una lente puntual cercana a la línea de visión, es decir, con $y \rightarrow 0$, se verifica que F sigue aproximadamente la siguiente expresión:

$$y \rightarrow 0 \implies |F| \simeq (1 + (\sqrt{\pi}x_E)^3)^{1/3} \quad (34)$$

Que es completamente distinto de lo que predice la aproximación geométrica, ya que esta nos devuelve una amplificación $\mu \propto x/y$, que es divergente cerca de la línea de visión.

Buscaremos entonces MCs que estén fuera del radio de difracción para poder tener $\mu > 1$, es decir, con $x_E > 1$ en el caso de la lente puntual. Tomaremos el mismo criterio para lentes difusas, y les aplicaremos el tratamiento de óptica geométrica, comentando si es pertinente los distintos efectos de las interferencias en este régimen.

4.2.1. Estimaciones del radio de difracción y de Einstein.

Veamos los valores de β_E y β_d para un minicluster típico. Supondremos por comodidad un perfil puntual.

Tomamos la masa típica para un MC, $M \sim 10^{-13} M_\odot$. Observando M31 (Andrómeda) y asumiendo que la lente está a mitad de trayecto, $d(EL) = d(LS) = d(ES)/2 = 770 \text{ kpc}$.

Calculemos primero β_E , que según [9] viene dado por la siguiente expresión en el caso puntual:

$$\beta_E^2 = \frac{4GMd(LS)}{d(EL)d(ES)} \rightarrow \beta_E|_{MC} \sim 10^{-15} \text{ rad} \quad (35)$$

Queda entonces por calcular Ω . Para ello debemos obtener primero el time delay, que como ya hemos mencionado antes tiene dos componentes: una potencial y otra geométrica.

- La componente potencial del time delay es particular para cada trayectoria considerada, y lleva consigo unos cálculos en ocasiones nada triviales. Puede estimarse su orden de magnitud a partir del producto GM , de forma que queda:

$$\Delta t_{pot.} \sim \frac{GM}{c^3} \sim 10^{-3} \text{ fs} \quad (36)$$

- La contribución geométrica puede calcularse a partir de la geodésica que siguen los rayos, calculando la diferencia de tiempos entre la situación en que la lente está presente y la que no. Puede darse una expresión analítica para esta:

$$\Delta t_{geo.} = \frac{(1 + z_L)d(EL)d(ES)(\beta - \alpha)^2}{2d(LS)} \quad (37)$$

Y como hemos dicho que este se encontraba a mitad de camino entre la Tierra y la fuente, podemos reescribir la expresión como:

$$\Delta t_{geo.} \approx \frac{1 + z_L}{2}(\beta - \alpha)^2 d(ES) \rightarrow \Delta t_{geo.} \approx \frac{1 + z_L}{2}(\beta - \alpha)^2 t_{real} \quad (38)$$

Donde t_{real} es el tiempo que le costaría al rayo llegar a la Tierra si no hubiera lente, es decir, en línea recta. Lo que hemos hecho es pasar la expresión de unidades naturales (donde $c=1$) al sistema donde $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Dado que hemos tomado M31 como fuente, se verifica que el $z_L \sim 0$. Si además tomamos un MC en β_E , tendremos que $\alpha \rightarrow 0$ y:

$$\Delta t_{geo.} \sim \frac{\beta_E^2}{2} t_{real} \sim 7 \cdot 10^{-2} \text{ fs} \quad (39)$$

Para calcular entonces Ω supongamos que el estudio se realiza con luz visible. Tomemos por ejemplo luz verde, con $\lambda = 500$ nm. Tenemos:

$$\Omega \sim 566 \text{ THz} \cdot 0,08 \text{ fs} \sim 0,04 \quad (40)$$

De esta forma para el MC típico tendremos que $\beta_d > \beta_E \rightarrow x_E < 1$, de forma que la magnificación estará suprimida a 1, que no entra en el umbral que estamos considerando para un evento de 1.34.

Necesitaremos MCs que verifiquen que $\Omega \gg 1$. Profundizaremos en el tipo de MCs que podremos observar con una campaña de microlensing en la sección 5, conclusiones.

4.2.2. Cálculos geométricos para el caso puntual.

Una vez hemos establecido que los miniclusters que nos interesan verifican las leyes de la óptica geométrica, vamos a exponer el caso de la lente puntual.

Para una lente considerada puntual de masa M en reposo y con los rayos lejos de su radio de Schwarzschild podemos escribir el ángulo de difracción como:

$$\gamma = \frac{4GM}{b} \quad (41)$$

Y a partir de la figura 1 podemos obtener mediante relaciones geométricas la ecuación de la lente del sistema:

$$\alpha = \beta - \frac{\beta_E^2}{\beta} \quad (42)$$

Donde β_E es el definido para una lente puntual en la ecuación (35). Para un valor cualquiera de α tendremos dos soluciones para β , que llamaremos β_+ y β_- por su signo.

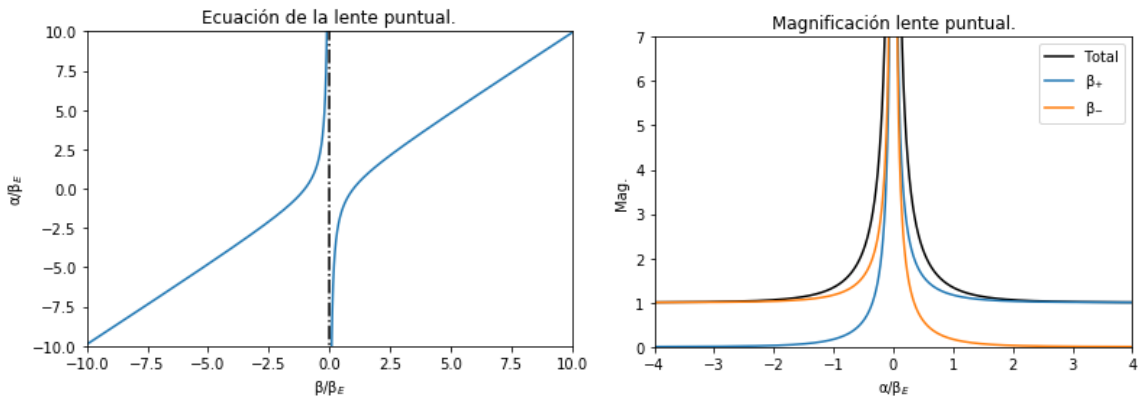
$$\beta_+ = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\beta_E^2 + \frac{\alpha^2}{4}} \quad \beta_- = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\beta_E^2 + \frac{\alpha^2}{4}} \quad (43)$$

En el caso en que $\alpha = 0$ vemos que tenemos la formación del anillo de Einstein, tal y como mencionamos antes., junto al pico de amplificación, que es una divergencia en el régimen geométrico.

La magnificación de una imagen en el límite de óptica geométrica se puede calcular como:

$$L/L_0 = \left| \frac{\beta}{\alpha} \frac{d\beta}{d\alpha} \right| \quad (44)$$

Esto nos da, para la lente puntual:



Y tenemos una divergencia correspondiente a la formación del anillo de Einstein, siendo la magnificación constante lejos de $\alpha = 0$.

Sin embargo esta no es la situación real, ya que los MCs poseen un cierto perfil de densidad y un radio, no son puntuales. En la siguiente sección estudiaremos tres perfiles de densidad, viendo los resultados que obtenemos con cada uno. Veremos en que situaciones podremos aproximarlos a una lente puntual, y la amplificación que podría devolvernos cada uno, todo esto con objetivo de ver qué tipo de Mcs serían ideales para observar en una campaña de microlensing.

4.3. Miniclusters como lentes dispersas.

Supondremos dos perfiles de densidad para los MCs: el perfil NFW, que se corresponde con el perfil observado en las simulaciones de acreción de MCs, y otro más concentrado, que llamaremos perfil core, por tener un núcleo muy bien definido.

Estudiaremos estos perfiles y los compararemos con la lente puntual, teniendo como objetivo ver cómo son sus curvas de luminosidad y cuando podremos asemejarlos a uno puntual.

4.3.1. Ecuación de la lente difusa.

Podemos escribir la ecuación de la lente difusa para cualquier perfil con simetría esférica como:

$$\beta - \alpha = \frac{\beta_{Ep}^2}{\beta} J(\beta, \dots) \quad (45)$$

Donde lo que hemos empleado es que el ángulo de deflexión de la luz, en aproximación a orden 1 rectilínea, puede escribirse como el correspondiente a una fuente puntual multiplicado por una función multivariable:

$$\gamma = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{GM(r)b}{(x^2 + b^2)^{3/2}} dx \equiv \frac{4GM_p}{b} J(b, \dots) \quad (46)$$

De esta forma consideramos que la masa que afecta al cambio de la trayectoria de un fotón es la contenida en un radio $r = \sqrt{x^2 + b^2}$.

Podemos entonces definir para cualquier perfil difuso el radio de Einstein convencional β_E y el radio de Einstein puntual, dado por esa M_p , que llamaremos β_{Ep} .

Los perfiles para MCs que vamos a considerar están caracterizados por una masa y una longitud r_s , llamada radio de escala, donde se concentra la mayoría de masa del MC. Nuestras funciones $J(\beta, \dots)$ vendrán determinadas por un solo parámetro: el cociente β/β_s , siendo $\beta_s = r_s/d(EL)$.

4.3.2. Perfil 'core'.

La densidad asociada a este perfil será:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{1 + (r/r_s)^4} \quad (47)$$

De forma que tendremos un núcleo (core) de radio r_s tal que prácticamente toda la masa estará concentrada en su interior. Este perfil es de interés precisamente por esta razón, pues permite tener MCs con un núcleo muy bien definido.

La masa se calcula sencillamente integrando en coordenadas esféricas:

$$M(r) = 4\pi\rho_s \int_0^r \frac{r'^2 dr'}{1 + (r'/r_s)^4} \quad (48)$$

Hacemos un primer cambio de variable a $x = r/r_o$:

$$M(r) = M_s \int_0^x \frac{x'^2 dx'}{1 + x'^4} = M_s \cdot I \text{ con } M_s = 4\pi\rho_s r_s^3 \quad (49)$$

Esta masa M_s se corresponde con la masa que nos da la parte puntual del ángulo de deflexión. La integral I es resoluble de forma analítica, obteniendo que la masa a un determinado radio r es:

$$M(r) = \frac{M_o}{4\sqrt{2}} \left[2 \left(\arctan \frac{(r/r_o) - (r_o/r)}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} \right) + \log \left| \frac{(r/r_o)^2 - \sqrt{2}(r/r_o) + 1}{(r/r_o)^2 + \sqrt{2}(r/r_o) + 1} \right| \right] \quad (50)$$

El ángulo de deflexión de la luz puede expresarse a partir de la ecuación (46) sencillamente como:

$$\gamma = \frac{4GM_s}{b} f(\bar{b} = \beta/\beta_s) \quad (51)$$

Siendo la función $f(\bar{b})$ una integral no resoluble analíticamente, que evaluaremos entonces mediante métodos numéricos:

$$f(\bar{b}) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}^2}{(\bar{x}^2 + \bar{b}^2)^{3/2}} \left[2 \left(\arctan \frac{\bar{x}^2 + \bar{b}^2 - 1}{\sqrt{2(\bar{x}^2 + \bar{b}^2)}} + \frac{\pi}{2} \right) + \log \left| \frac{\bar{x}^2 + \bar{b}^2 - \sqrt{2}\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{b}^2} + 1}{\bar{x}^2 + \bar{b}^2 + \sqrt{2}\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{b}^2} + 1} \right| \right] d\bar{x} \quad (52)$$

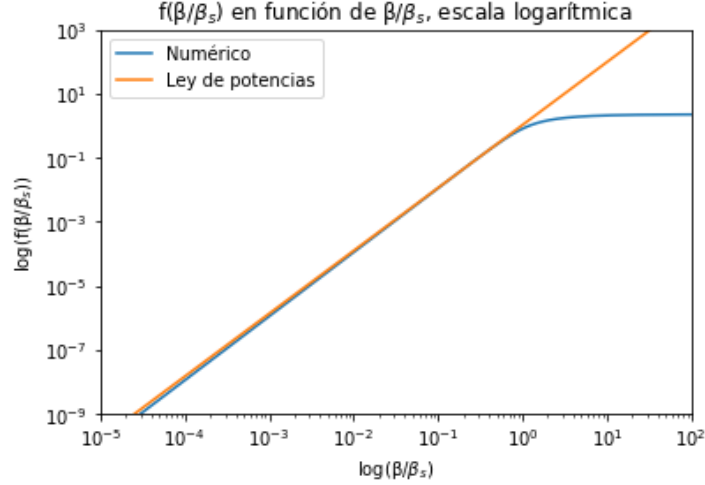


Figura 2: Función $f(\bar{b})$ del ángulo de deflexión. Calculada numéricamente. Solo se muestra la parte positiva porque la función es simétrica. Se puede ver que crece rápidamente y tiene un cambio de régimen en torno a $\bar{b} = 1$, punto a partir del cual es prácticamente constante, consistente con que la masa apenas varíe una vez salimos de la escala de tamaños del núcleo (β_s).

En el límite asintótico en que $\beta/\beta_s \ll 1$ la función es una ley de potencias del tipo $f(\bar{b}) \propto \bar{b}^n$, siendo $n \sim 2$, indicada en naranja en la gráfica. La ecuación de la lente queda como indicamos previamente en (45), tal que:

$$\alpha = \beta - \frac{\beta_{Ep}^2}{\beta} f\left(\frac{\beta}{\beta_o}\right) \quad (53)$$

Donde:

$$\beta_{Ep} = \frac{4GM_s d_A(LS)}{d_A(ES)d_A(EL)} \quad \bar{b} = \frac{b}{r_s} = \frac{\beta}{\beta_s}$$

También cabe destacar que aunque tengamos una lente difusa podemos seguir definiendo el β_E de dicha lente de forma idéntica al puntual: el valor de $\beta \neq 0$ tal que $\alpha = 0$. Sigue manteniendo su significado físico; en este se genera un anillo de imágenes alrededor de la línea de visión y nos da una magnificación divergente en óptica geométrica.

Dado que tenemos un grado de libertad adicional dado por la escala de tamaño del núcleo, podemos definir un parámetro extra para estudiar el comportamiento del sistema $\xi \equiv \beta_s/\beta_{Ep}$. Este representa el ratio entre β_s y β_{Ep} , es decir, entre el tamaño del núcleo y el del anillo de Einstein si toda la masa del núcleo estuviera en un punto.

Posteriormente veremos cuál es realmente el efecto de ξ al comparar los perfiles con el de una lente puntual con el mismo valor de β_E . Para distintos valores de este se tienen las siguientes gráficas de $\alpha(\beta)$, todas normalizadas con el β_E real de la lente:

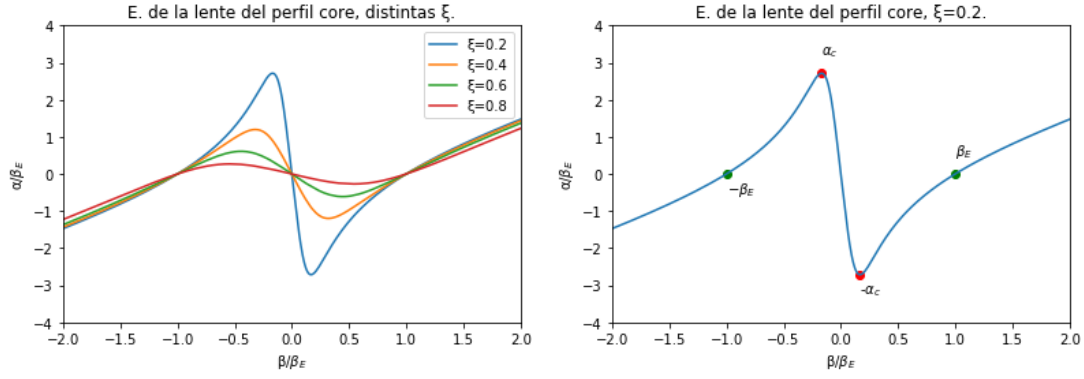


Figura 3: A la izquierda, gráfica de $\alpha(\beta)$ para el perfil 3, distintas ξ . A la derecha, gráfica detallada para $\xi = 0,2$.

Podemos definir entonces 4 puntos clave que nos permitirán distinguir el número de soluciones que tendremos en cada intervalo, permitiendo calcular de forma sencilla la luminosidad. Estos puntos están marcados en la gráfica:

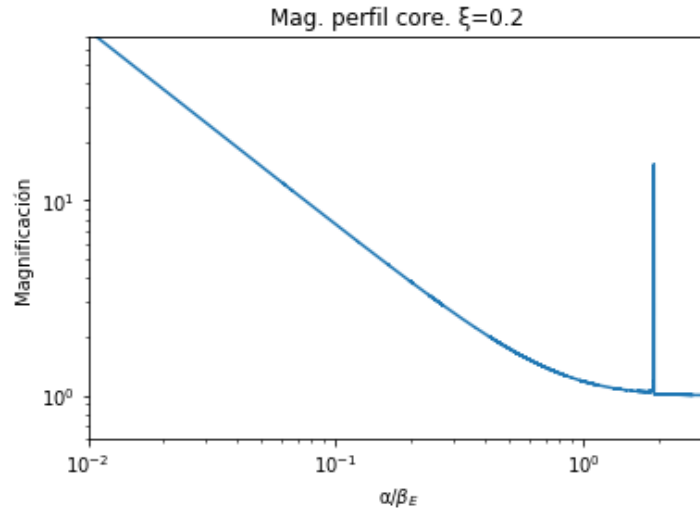
- Los puntos rojos se corresponden con $\pm\alpha_c$ y nos permitirán distinguir el número de soluciones según el valor de α en que estemos. También marcarán una divergencia de la luminosidad si tomamos un tratamiento clásico, ya que $d\alpha/d\beta = 0$.
- Los puntos verdes serán β_E . Nos indican el comportamiento de la magnificación a grandes distancias de nuestra lente, ya que podremos asumir que es una lente puntual con ese valor de β_E . Según el valor de ξ veremos que la escala para aproximar a una lente puntual se alcanzará más o menos rápido.

Tenemos entonces tres posibilidades:

- En el caso en que $|\alpha| > \alpha_c$ solo tendremos una solución. Esto se corresponde con que el resto de rayos pasarán a valores de β tan pequeños que apenas verán masa y por tanto no se desviarán, de forma que no llegarán a la Tierra. Dado que el que sí llega se entiende que va a valores de $\beta > \beta_E$, según el valor de ξ podrán aproximarse correctamente por una lente puntual.
- Si $\alpha \in [-\alpha_c, \alpha_c]$ tendremos tres soluciones, que denotaremos como β_+ , β_0 y β_- .

La imagen central β_0 tendrá muy poca amplificación, y su contribución en la mayoría de ocasiones será despreciable, puesto que se ve mucho menos desviada que las anteriores.

Una vez sacamos las soluciones para cada valor de α y calculada su luminosidad asociada podemos suponer que la total es la suma de las individuales, tal y como mencionamos en secciones anteriores, obteniendo:



Y vemos lo comentado anteriormente: una divergencia ancha en torno a $\alpha = 0$, marcada principalmente por β_+ , $\beta_- \sim \beta_E$, y unas divergencias para α_c mucho más estrechas, ya que allí lo que diverge es la derivada.

Cerca de $\alpha = 0$ se observa que la magnificación es inversamente proporcional a α/β_E , hecho que también veremos en el perfil NFW.

4.3.3. Perfil isoterma.

Este caso lo estudiamos ya que, aunque no es representativo de los MCs, veremos a continuación que verifica que $M(r) \propto r$, es decir, no tiene un núcleo bien definido, teniendo una dinámica muy distinta a la del perfil anterior. Dado que el último perfil estudiado es NFW (Navarro-Frank-White), que tiene un núcleo definido pero tiene una dependencia de M logarítmica con r a partir de dicho núcleo, parece pertinente estudiar esta dependencia lineal antes.

La densidad para el perfil isoterma tiene una dependencia del tipo r^{-2} :

$$\rho(r) = \frac{\langle v^2 \rangle}{2\pi G r^2} \rightarrow M(r) = \frac{2 \langle v^2 \rangle r}{G} \quad (54)$$

De esta forma el ángulo de deflexión de la luz γ queda:

$$\gamma = 4\pi \langle v^2 \rangle \quad (55)$$

Y es independiente del valor de β , lo que sugiere un comportamiento bastante distinto del observado en otros perfiles. Dada la ecuación de la lente, podemos interpretar que esta tendrá dos soluciones, que llamaremos β_+ y β_- . Analíticamente sus valores serán:

$$\beta_{EI} \equiv \frac{\gamma d_A(LS)}{d_A(ES)} \rightarrow \beta_+ = \alpha + \beta_{EI} \quad \beta_- = -\alpha + \beta_{EI} \quad (56)$$

Esto quiere decir que al hacer la gráfica de $\alpha(\beta)$ tendremos dos cortes con una recta del tipo $\alpha = \alpha_i$, es decir, dos soluciones por cada valor de α . La dependencia de esta variable con la β será lineal, con pendiente positiva o negativa.

Podemos entonces calcular la luminosidad de estas imágenes para ver cuál de ellas es dominante. Sencillamente:

$$L = L_+ + L_- = \left| 1 + \frac{\beta_{EI}}{\alpha} \right| + \left| -1 + \frac{\beta_{EI}}{\alpha} \right| \quad (57)$$

La luminosidad será entonces una función que estará definida a trozos debido a la existencia de dichos valores absolutos. Esta función será simétrica respecto de α , de forma que solo indicamos analíticamente la parte con $\alpha > 0$:

$$\begin{cases} L(\alpha) = 2 \text{ si } \alpha > \beta_{EI} \\ L(\alpha) = 2 \frac{\beta_{EI}}{\alpha} \text{ si } \alpha < \beta_{EI} \end{cases} \quad (58)$$

De esta forma la luminosidad diverge a valores de α muy pequeños, es decir, cuando las imágenes salen con ángulos similares a β_{EI} . Se observa de nuevo la dependencia inversa al cociente α/β .

Dominará la luminosidad la imagen correspondiente al signo de α , aunque esa diferencia tiende a 0 en el infinito. Conforme vamos disminuyendo el valor de β_{EI} se observa que la luminosidad se acerca aún más a una función del tipo delta de Dirac en $\alpha = 0$ junto a un fondo constante de valor 2, mientras que conforme este valor aumenta se tiene algo más similar a una función del tipo $f(x) = 1/x$ en un dominio que aumenta junto al valor de β_{EI} .

4.3.4. NFW.

El perfil NFW resulta de interés, pues numerosas simulaciones sobre MCs parecen apuntar que este debería ajustarse bastante bien al perfil de densidad real.

Este, al igual que el perfil core, tiene un núcleo definido por una escala r_s , pero el crecimiento con la masa es logarítmico una vez pasada esa escala, a diferencia del otro.

La densidad de este perfil viene dada por:

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_o}{r/r_s(1 + r/r_s)^2} \quad (59)$$

Es sencillo entonces calcular la masa como:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r^2 \rho_{NFW}(r) dr = 4\pi \rho_o \int_0^r \frac{r^2}{r/r_s(1+r/r_s)^2} dr \quad (60)$$

Hacemos entonces un cambio de variable a $y = r/r_s$, de forma que la integral queda:

$$M(r) = 4\pi \rho_o r_s^3 \int_0^y \frac{y^2}{y(1+y)^2} dy = M_{NFW} \cdot I = M_{NFW} (\log(1+y) - \frac{y}{1+y}) \quad (61)$$

El ángulo de deflexión:

$$\gamma = \frac{4GM_{NFW}}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2}{2(b^2 + x^2)^{3/2}} \left(\log \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{r_s} \right) - \frac{\sqrt{x^2 + b^2}/r_s}{1 + \sqrt{x^2 + b^2}/r_s} \right) dx \quad (62)$$

Que resulta más conveniente poner en variables adimensionales $\bar{x} = x/r_s$ y $\bar{b} = b/r_s$, tal que:

$$\gamma = \frac{4GM_{NFW}}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}^2}{2(\bar{b}^2 + \bar{x}^2)^{3/2}} \left(\log(1 + \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{b}^2}) - \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{b}^2}}{1 + \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{b}^2}} \right) d\bar{x} = \frac{4GM_{NFW}}{b} J(\bar{b}) \quad (63)$$

Por lo que la ecuación de la lente difusa, sencillamente será:

$$\alpha = \beta + \frac{\beta_{Ep}^2}{\beta} J \left(\frac{\beta}{\beta_s} = \frac{b}{r_s} \right) \quad (64)$$

Donde hemos definido:

$$\beta_{Ep}^2 \equiv \frac{4GM_{NFW} d_A(LS)}{d_A(ES) d_A(EL)}$$

Esta función $J(\bar{b})$, a diferencia de $f(\bar{b})$ del perfil core, puede aproximarse analíticamente mediante la siguiente expresión:

$$J(\bar{b}) = \frac{1}{2} \frac{\bar{b}}{1 + \bar{b}} \left[\frac{\bar{b}}{2} \log \left(\frac{\sqrt{\bar{b}^2 + 1} + 1}{\sqrt{\bar{b}^2 + 1} - 1} \right) + 2 \left(\log(\bar{b} + 1) - \frac{\bar{b}}{\bar{b} + 1} \right) \right] \quad (65)$$

Que se ajusta bien en las zonas asintóticas pero tiene cierto error en el resto del intervalo, por lo que la trataremos numéricamente. Gráficamente se tiene:

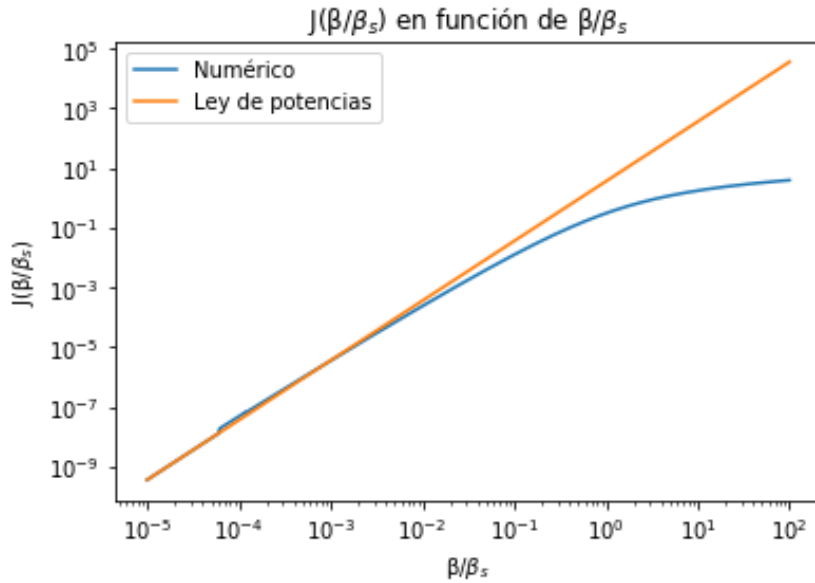


Figura 4: $J(\bar{b})$ en función de \bar{b} , junto a la ley de potencias para $\bar{b} \ll 1$.

Podemos ver entonces los dos casos asintóticos mencionados previamente:

$$J(b) \begin{cases} \propto \bar{b}^n \text{ con } n \approx 2 \text{ si } \bar{b} \ll 1 \\ \propto \log \bar{b} \text{ si } \bar{b} \gg 1 \end{cases} \quad (66)$$

Podemos definir de forma análoga al perfil core un parámetro extra que nos ayudará a comprender el comportamiento de nuestro sistema, $\xi = \beta_s / \beta_{Ep}$.

De esta forma si $\xi \ll 1$ podremos aproximar la ecuación de la lente a una puntual a partir de r_s , teniendo una corrección logarítmica de orden 1 por el crecimiento de la masa del MC con el radio.

Por el contrario si $\xi \gg 1$ lo que ocurrirá será que el MC será muy poco denso en comparación con la escala de lente puntual, dando lugar a desviaciones de los rayos bastante despreciables y un mal funcionamiento de la aproximación puntual.

La ecuación de la lente para distintos valores de ξ normalizada con el β_E real (valor de β para el que α es 0) queda de la forma:

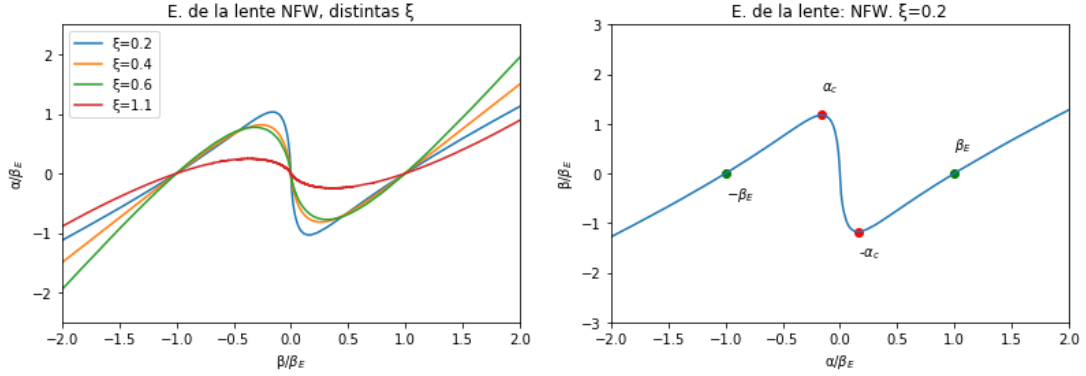


Figura 5: A la izquierda, ecuación de la lente para distintos valores de ξ , todas con el mismo β_{Ep} . A la derecha, ecuación de la lente con $\xi = 0,2$, detallando β_E y los α_c .

Tomemos la gráfica de la derecha. Tendremos entonces tres posibilidades dado un valor de α : uno, dos o tres valores de β posibles, lo que se traduce en número de imágenes.

- Si tenemos un valor de α comprendido entre los puntos que hemos llamado α_c y $-\alpha_c$ tendremos tres soluciones. Estas tres imágenes contribuirán a la luminosidad total, aunque la central será la menos relevante de todas ellas.
- Si cortamos en valores de α no contenidos en el intervalo anterior solo tendremos una solución. Esto se corresponde con que los rayos que pasarían con otros valores de β apenas ven masa en la lente y no se desvían, por lo que no llegan a la Tierra y no generan una imagen. Dado que se entiende que el rayo que se desvía ve gran parte de la masa del sistema, una aproximación a lente puntual debería aproximarse muy bien al comportamiento de nuestro perfil.
- Si cortamos justo en los valores de α_c tenemos dos soluciones, y dos de las imágenes se combinan para dar una sola.

Y la magnificación en función de α :

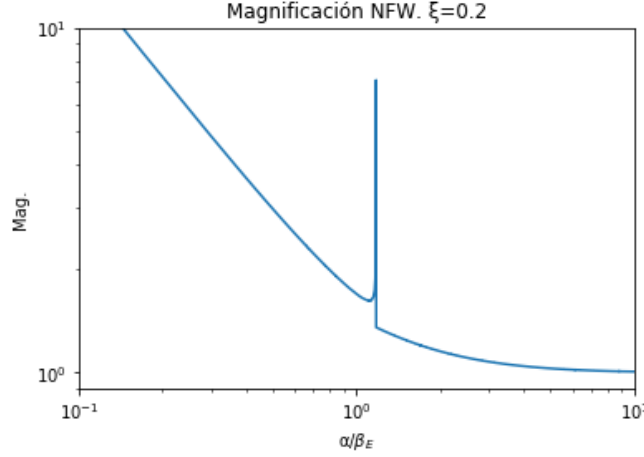


Figura 6: Magnificación(α) para el perfil NFW, con $\xi = 0,2$. Escala logarítmica en ambos ejes.

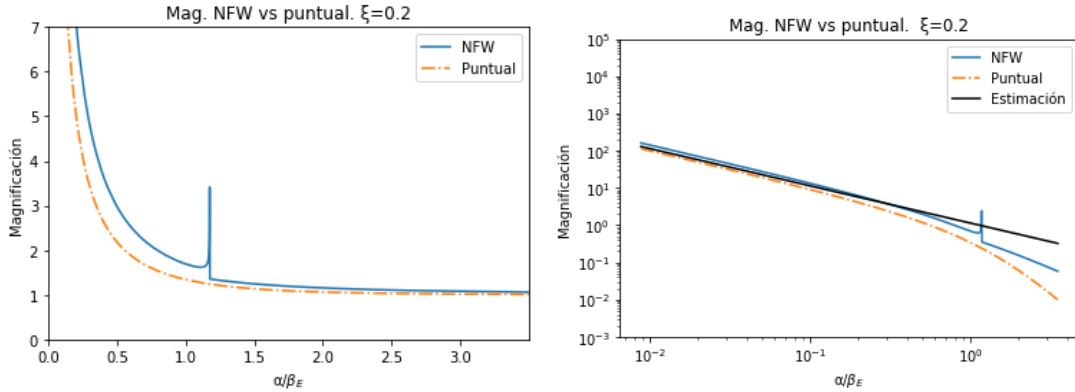
Efectivamente se ve como cerca de $\alpha = 0$ tenemos una divergencia bastante ancha que es del tipo β/α , tendencia que han verificado también los perfiles anteriores. Al igual que en el perfil core, las divergencias en torno a α_c son muy estrechas.

4.3.5. Comparación con lente puntual.

Una vez vistos los perfiles NFW y core, vamos a proceder a compararlos con una lente puntual. Emplearemos un perfil puntual con la misma β_E de dichos perfiles, que obtenemos de forma numérica, explicado el cómo en la siguiente sección.

NFW.

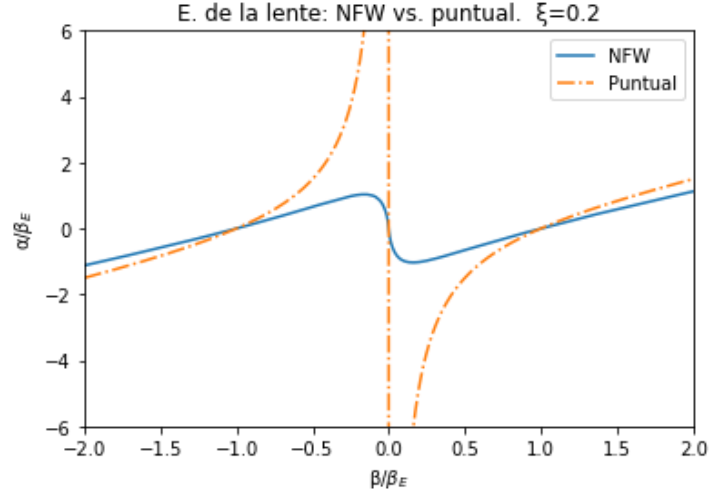
Comenzamos tomando un perfil NFW con $\xi = 0,2$. Si vemos la luminosidad:



Tal y como se esperaba las curvas son muy similares en los valores de α más elevados, que es cuando estamos lejos del core de nuestra lente y por tanto se parece más a algo puntual. Obviamente no tenemos las divergencias en torno a α_c , y la fuente puntual predice una menor luminosidad entre 0 y ese punto.

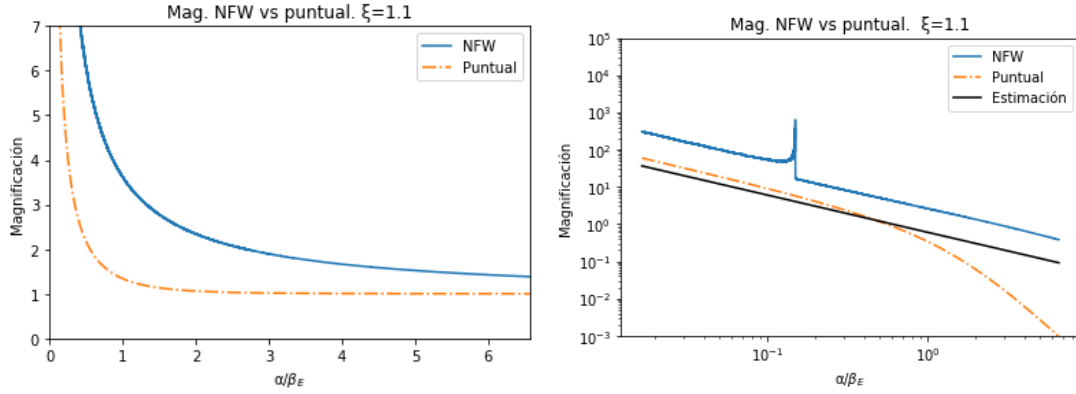
En la gráfica de la derecha se ha añadido una línea adicional, que hemos llamado 'estimación'. Esto es para comprobar si a valores bajos de α podemos aproximar la luminosidad por el cociente β_E/α . Se observa entonces la buena correlación entre el NFW y esta estimación, que desaparece al acercarnos al punto en que $\alpha/\beta_E = 1$.

Si comparamos entonces las ecuaciones de la lente para ambos perfiles:



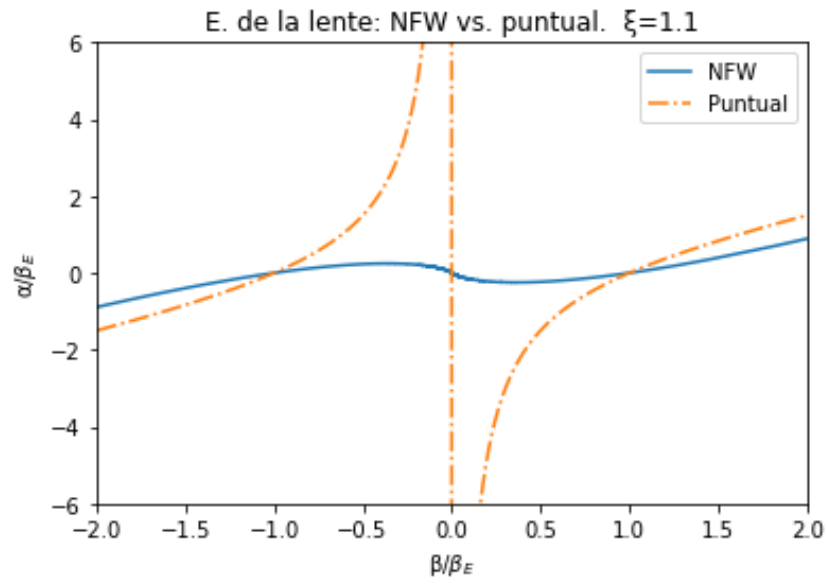
Vemos que son similares cerca de β_E pero conforme nos alejamos se aprecia más la diferencia, de ahí el cambio en la luminosidad. Eventualmente la NFW nos dará soluciones con $|\beta_{NFW}| > \beta_{puntual}$ por las correcciones logarítmicas a la masa, hecho que no llega a verse en la gráfica.

El buen acuerdo entre la aproximación puntual y el perfil NFW cerca de $\alpha = 0$ depende de la relación entre la escala puntual y la escala del núcleo, es decir, ξ . Tomando como ejemplo $\xi = 1.1$, podemos ver el cambio en la tendencia:



La magnificación no tiene nada que ver entre los perfiles. Esto es porque cuando $\xi > 1 \implies \beta_s > \beta_{Ep}$, y por tanto en la zona en que $\beta \sim \beta_{Ep}$ el crecimiento con la masa va con r^2 , no con el $\log r$. Esto da lugar a una gran desigualdad entre el perfil NFW y la aproximación puntual, que se refleja en la parte de α pequeño en la gráfica, donde la luminosidad es enormemente distinta.

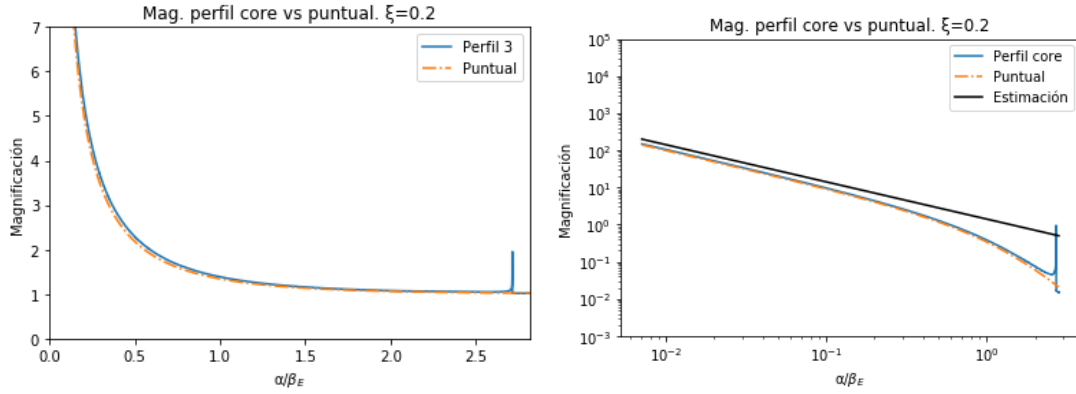
Al pasar la escala del núcleo las curvas se irán acercando, pero nunca serán iguales debido a las correcciones logarítmicas a la masa. Estos argumentos pueden confirmarse viendo la ecuación de la lente:



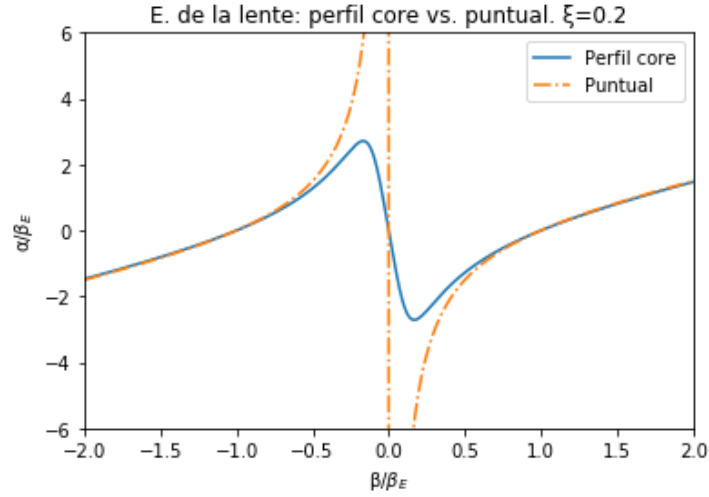
Aunque en los extremos, al igual que en el caso de $\xi = 0,2$, parece que NFW da menores valores de β que la puntual, se comprueba numéricamente que estas curvas se van acercando, hasta que eventualmente la NFW quedará por encima.

Perfil core.

Siguiendo la misma estrategia empleada para el perfil NFW, compararemos con la lente puntual para distintos valores de ξ . Comenzamos con $\xi = 0,2$:

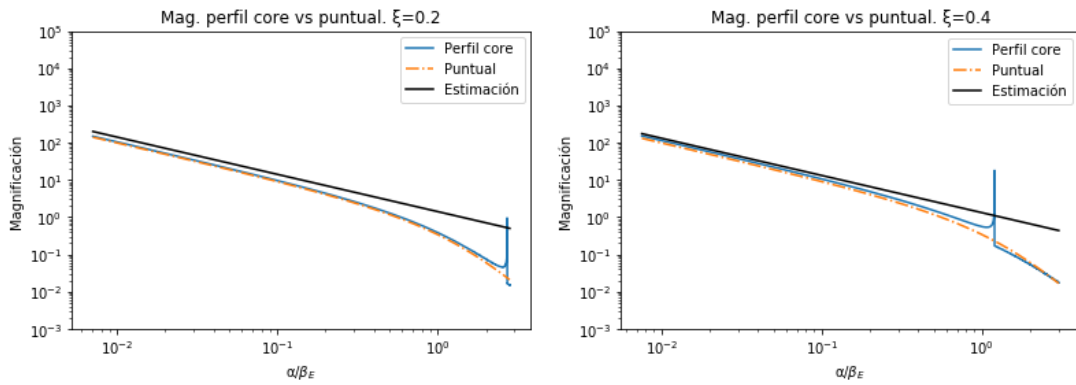


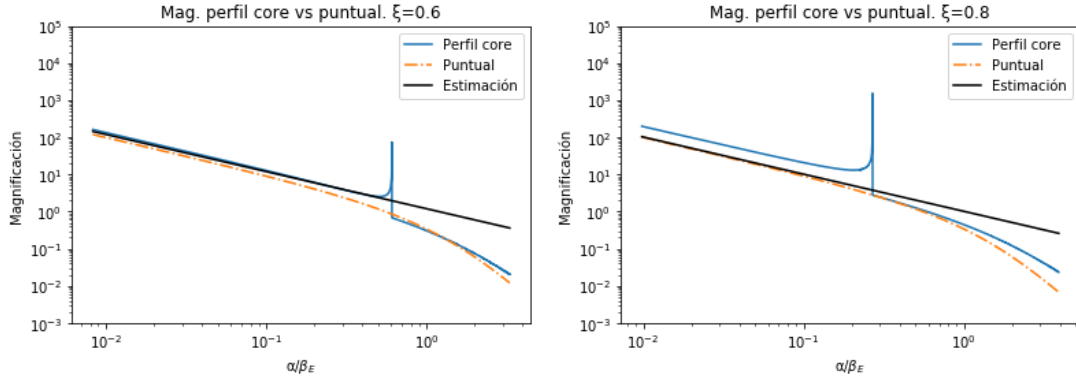
Se ve entonces que la correspondencia entre ambos perfiles es muy buena salvo los picos en α_c que no contempla el perfil puntual. La ecuación de la lente debería ser entonces muy similar en ambos perfiles:



Que es lo que se ve a partir de β_E . Obviamente la región central no coincide, pero esto no nos afecta a la magnificación ya que la producida por el valor de β cercano a 0 es completamente despreciable.

Esta relación tan buena entre las dos curvas cambia con el parámetro ξ y puede apreciarse en las siguientes gráficas:





Y efectivamente conforme menor sea ξ , es decir, conforme menor sea la escala del núcleo respecto a la de lente puntual, antes podremos intercambiar un perfil por el otro.

La correspondencia entre ambas curvas a partir de un cierto valor de β será muy buena, pues ahora no tenemos correcciones logarítmicas a la masa, ya que el núcleo está muy bien definido.

Es decir, el único efecto que tiene el valor de ξ radica en que la aproximación puntual se pueda aplicar a partir de un valor de β mayor o menor. A mayor ξ , mayor será dicho β .

4.3.6. Sumario.

1. Encontramos que para todos los perfiles hay una solución para $\alpha = 0$, que nos da una divergencia de la magnificación en el tratamiento de óptica geométrica.

Sabemos que esta no es la situación real, sino que lo que se produce es un anillo de Einstein de radio β_E , y la magnificación producida aunque grande, es finita.

El valor de β_E es sencillamente calculable resolviendo la ecuación de la lente cuando $\alpha = 0$:

$$\beta_E^2 = \beta_{Ep} J\left(\frac{\beta_E}{\beta_s}\right) \quad (67)$$

Esta se resuelve numéricamente, o según la complejidad de la función $J(\beta/\beta_s)$ podría construirse una aproximación analítica.

La definición de β_E permite renormalizar la ecuación de la lente, quedando:

$$\alpha = \beta - \frac{\beta_E^2}{\beta} \bar{J}\left(\frac{\beta}{\beta_s}\right) \quad ; \quad \bar{J}\left(\frac{\beta}{\beta_s}\right) = \frac{J\left(\frac{\beta}{\beta_s}\right)}{J\left(\frac{\beta_E}{\beta_s}\right)} \quad (68)$$

2. Hemos definido el parámetro $\xi = \beta_s/\beta_{Ep}$, que controla la diferencia entre la lente puntual y la lente dispersa, ajustándose mejor el perfil a una lente puntual conforme menor es este parámetro.

Dado que se verifica que el radio de Einstein decrece muy rápido a medida que $\xi \rightarrow 1$, buscaremos miniclusters muy concentrados para evitar que $\beta_E < \beta_d$, dado que sino la magnificación estará suprimida y no tendremos un evento.

3. Tenemos una serie de resonancias secundarias dadas por la divergencia de la derivada $d\beta/d\alpha$, puntos que hemos marcado como α_c (alfa crítico). Estos puntos marcan la diferencia entre la existencia de tres imágenes ($|\alpha| < |\alpha_c|$) o de una sola ($|\alpha| > |\alpha_c|$).

Estas divergencias, que son muy estrechas, podrían ayudarnos a distinguir los distintos perfiles de densidad de una lente, ya que se producen a un valor de α concreto, y alrededor de estos la magnificación crece o decrece de forma monótona.

Sin embargo, también cabe la posibilidad de observarlos según las características del detector, puesto que como son divergencias de la derivada son mucho más estrechas que un anillo de Einstein, por ejemplo.

4. Para obtener una buena amplificación que podamos apreciar sin problemas parecemos necesitar la formación de un anillo de Einstein. Cerca de $\alpha = 0$ podemos linealizar la ecuación de la lente:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = 1 - \frac{\beta_E^2}{\beta^2} \bar{J}\left(\frac{\beta}{\beta_s}\right) + \frac{\beta_E^2}{\beta} \frac{d\bar{J}}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha} \frac{1}{\beta_s} \quad (69)$$

De forma que evaluándola en β_E y despejando:

$$\left. \frac{d\beta}{d\alpha} \right|_{\beta=\beta_E} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{d \log \bar{J}}{d \log \beta} \right) \quad (70)$$

De forma que la amplificación del anillo de Einstein o sus alrededores es mayor en una lente dispersa que en una puntual si ambas tienen el mismo valor de β_E , cosa que ya habíamos observado en las gráficas de la sección anterior.

Dado que para los perfiles core y NFW se verifica que:

$$\frac{d \log \bar{J}}{d \log \beta} \approx 2 \text{ si } \frac{\beta_E}{\beta_s} \ll 1 \quad (71)$$

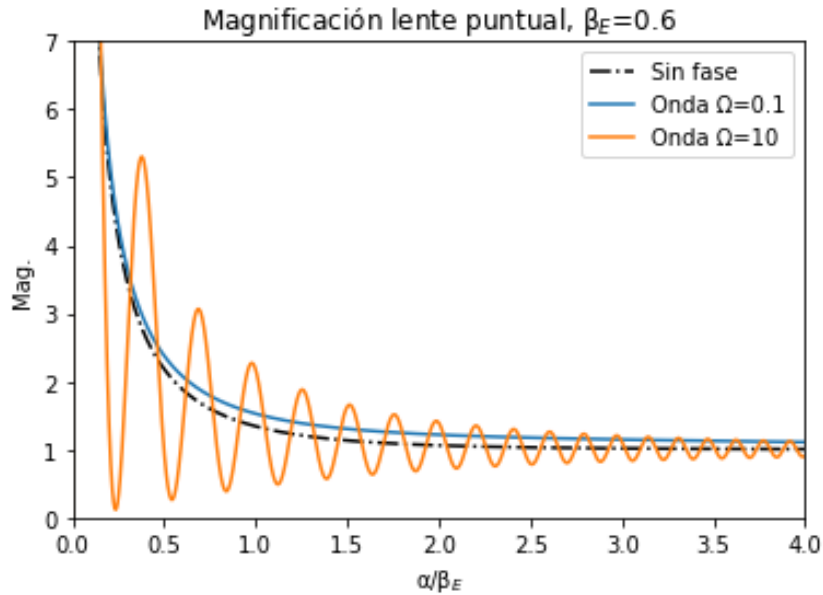
Por la ley de potencias que vimos previamente. En el límite opuesto lo que ocurre es que ese factor tiende a 0. Podemos concluir entonces que para perfiles con una ley de potencia el aumento en amplificación respecto de la lente puntual siempre será de orden 1.

5. Aunque estemos considerando válido el límite de la óptica geométrica también hay que tener en cuenta los fenómenos de interferencia, que tendrían origen en la diferencia de caminos entre los rayos. Estos podrían darnos tanto interferencia constructiva (el doble de magnificación) como destructiva (magnificación 0), de forma que las gráficas que se han mostrado hasta ahora se corresponde con la suposición de que la fase entre rayos es aleatoria, y la amplificación promedio es la suma de la de los dos rayos por separado.

Para una lente puntual, en el régimen geométrico, la amplificación teniendo en cuenta las interferencias queda, según [4]:

$$\mu = \frac{\bar{\beta}^2 + 2}{\bar{\beta}\sqrt{\bar{\beta}^2 + 4}} + \frac{2}{\bar{\beta}\sqrt{\bar{\beta}^2 + 4}} \sin \left(\Omega \left[\frac{\bar{\beta}\sqrt{\bar{\beta} + 4}}{2} + \log \left| \frac{\bar{\beta} + \sqrt{\bar{\beta}^2 + 4}}{\bar{\beta} - \sqrt{\bar{\beta}^2 + 4}} \right| \right] \right) \quad (72)$$

Donde $\bar{\beta} = \beta/\beta_E$. Esto nos da una amplificación oscilante, marcando el periodo de dicha oscilación el valor de Ω , que viene dada por la frecuencia de la luz y el delay entre los rayos como $\Omega = \omega \Delta t$. Podemos ver esto en la siguiente gráfica:



Luego vemos efectivamente la aparición de esos máximos y esos mínimos.

Si observamos un número suficiente de fuentes podemos esperar que los casos que perderemos por interferencias destructivas serán los mismos que ganaremos por constructivas, de forma que

solo tenemos en cuenta esto como un comentario, y no lo tendremos en cuenta en ningún cálculo posterior.

Además, si el periodo de la señal es mucho menor que el tiempo de integración del detector, estas oscilaciones se contrarrestan entre sí y la medida promediará a las de las curvas mostradas previamente, como si no tuviéramos fase alguna.

También debe notarse que las interferencias solo se darán en el caso en que tengamos más de una imagen. Para los perfiles core y NFW esto es especialmente importante, pues si se verifica que $\alpha > \alpha_c$ solo se forma una imagen, y no tendremos esas oscilaciones. De esta forma podríamos determinar α_c como la frontera entre ambos comportamientos, lo que nos daría información sobre el MC en cuestión.

4.3.7. Estrategia general para cualquier perfil.

En esta sección vamos a comentar brevemente los pasos a seguir para desarrollar la ecuación de la lente y las curvas de magnificación para un perfil cualquiera. Contemplaremos dos posibilidades, en función de la expresión de la densidad:

- Función densidad analítica: esta densidad dependerá del radio considerado y de una serie de parámetros (como r_s en los perfiles core y NFW). El estudio será muy completo, dado que podremos observar el efecto de cada uno de los parámetros en las medidas de microlensing.
- Función densidad a partir de datos numéricos: tendremos que reconstruir la función a través de una interpolación. Este tipo de situaciones no nos permitirán estudiar el efecto de cambios de parámetros en el perfil, ya que desconoceremos dichos parámetros y sus dependencias. El único posible cambio serán renormalizaciones de escala.

Una vez tenemos la densidad, lo primero será construir la función de masas, que será analítica o numérica dependiendo de la complejidad del perfil en cuestión. Con la masa ya podemos construir en ángulo de deflexión de la luz teniendo según (46), poniéndolo en función de un ángulo 'puntual' y la función $J(\beta, \dots)$.

En el caso de la densidad numérica, obviamente no podremos obtener una ecuación de la lente de la forma habitual con la función J , sino que tendremos una interpolación dependiente de α y β , dependiendo el ángulo de deflexión de esta última variable.

La amplificación se obtiene de la ecuación de la lente fijando un valor de α y sacando las β que son solución. A partir de estas calculamos su magnificación asociada y las sumamos. Resulta particularmente útil en este apartado definir β_E y algo similar a las α_c de los perfiles core y NFW, que nos permitirán separar la ecuación en zonas con un número de soluciones concreto, simplificando el código.

Una vez tenemos la amplificación del perfil, podemos estudiar el efecto de los distintos parámetros en esta, comprobando si para los valores típicos de estos tendremos un evento. Obviamente esto no será posible cuando tengamos el perfil numérico.

5. Conclusiones.

El objetivo de este trabajo es analizar las condiciones idóneas para poder tener un evento de microlensing, cuyo umbral de amplificación hemos marcado en 1.34.

Hemos visto la expresión de la amplificación teniendo en cuenta el carácter ondulatorio de la luz, viendo dos posibilidades para esta en función del parámetro x_E , que relaciona el radio de difracción β_d con el de Einstein β_E .

Si $x_E < 1$ la amplificación está suprimida a 1, lo que no nos dará un evento. Esto se verifica para los MCs típicos ($M \sim 10^{-13} M_\odot$) tal y como se aprecia en la ecuación (35), de forma que no nos servirán.

Buscaremos entonces MCs más exóticos, con características mejores para realizar microlensing. Podemos extraer dos condiciones de lo visto hasta ahora:

- En los perfiles NFW y core se puede apreciar que el valor de β_E está enormemente suprimido si $\beta_s > \beta_{Ep}$, es decir, si $\xi > 1$. Buscaremos entonces MCs muy concentrados, cuya escala de radio del núcleo sea muy pequeña respecto a la puntual para que el radio de Einstein no esté suprimido.
- Si se verifica la anterior condición y los rayos están a una distancia mayor que la del núcleo de nuestro MC, tal que podemos tratarlo como una lente puntual, podremos aproximar su β_E por la de una lente puntual.

Para aumentar el valor de esta hasta conseguir $x_E > 1$ buscaremos MCs con más masa, ya que crece con $M^{1/2}$. La condición se puede escribir también como $\Omega > 1$.

Luego en dos palabras: concentrados y masivos. De la segunda es sencillo extraer una condición para la masa. Partimos de la misma situación del cálculo inicial de Ω : con $\beta = \beta_E$ y a mitad de camino entre la Tierra y M31:

$$\Omega > 1 \rightarrow \Delta t > \frac{1}{\omega} \rightarrow \frac{GM}{c^3} + \frac{\beta_E^2}{2} \frac{d(ES)}{c} > \frac{1}{\omega} \quad (73)$$

Y tomando β_E como el de una lente puntual, podemos despejar una relación entre M y ω :

$$M(\omega) \sim \frac{c^3}{G\omega} \quad (74)$$

Para verificar $\Omega = 1$. Por ejemplo, para la luz verde de 566 THz necesitaríamos un MC con $M \sim 10^{-10} M_\odot$, 3 órdenes de magnitud mayor que el típico.

También podemos establecer una relación entre la masa y el radio de escala forzando que $\xi < 1$ para que β_E no esté suprimido. Se tiene entonces:

$$\xi < 1 \rightarrow \beta_{Ep} > \beta_s \rightarrow d_{EL} \sqrt{\frac{4GM_s d(LS)}{d(ES)d(EL)}} > r_s \quad (75)$$

Y suponiendo la masa puntual como la masa del MC (válido para valores de ξ bajos) podemos poner una cota superior a este radio. Para el caso particular de M31 que hemos aplicado antes se tiene que si $M \sim 10^{-10} M_\odot$:

$$r_s < 75000 \text{ km} \quad (76)$$

Y estas son las dos condiciones que pueden extraerse de los MCs.

Aunque un MC de esta masa o superior pase cerca de la línea de visión puede que no nos de una amplificación apreciable. Tendrá que estar en el interior del tubo de Einstein de esa línea para conseguirlo, que es de radio β_E en aproximación puntual. Esto se sabe de secciones anteriores; en 3.1 ya integramos a todos los valores de la coordenada x sobre la línea de visión, considerando el radio del tubo de Einstein en cada punto.

También debemos tener en cuenta que es posible que las oscilaciones por la interferencia de los rayos en régimen geométrico nos permitan observar eventos que de otra forma pasarían desapercibidos, o caracterizar un evento en base a la presencia y ausencia de estas a lo largo del tiempo.

Cabe mencionar algo que, aunque no se incluye en este trabajo, resulta de interés. Si se obtuviera una estimación de la distribución del contraste de los MCs podría, empleando lo expuesto en la sección 3.1, deducirse el número esperado de eventos, y calcular una estimación del número de estos MCs que deben existir para poder observarlos en una campaña de microlensing de una cierta duración. Esto podría potencialmente aportar otras ligaduras sobre el tipo de MCs que se podrían observar con microlensing en un tiempo razonable para uno de estos experimentos.

Referencias

- [1] E. Armengaud et al. Conceptual Design of the International Axion Observatory (IAXO). *JINST*, 9:T05002, 2014.
- [2] K. Chang and S. Refsdal. Flux variations of QSO 0957 + 561 A, B and image splitting by stars near the light path. *Nature*, 282, 1979.
- [3] Malcolm Fairbairn, David J. E. Marsh, Jérémie Quevillon, and Simon Rozier. Structure formation and microlensing with axion miniclusters. *Phys. Rev. D*, 97(8):083502, 2018.
- [4] Andrey Katz, Joachim Kopp, Sergey Sibiryakov, and Wei Xue. Femtolensing by Dark Matter Revisited. *JCAP*, 12:005, 2018.
- [5] Edward W. Kolb and Igor I. Tkachev. Large amplitude isothermal fluctuations and high density dark matter clumps. *Phys. Rev. D*, 50:769–773, 1994.
- [6] David J. E. Marsh Malcolm Fairbairn and Jérémie Quevillon. Searching for the qcd axion with gravitational microlensing. *KCL-PH-TH/2017-03*, 2017.

- [7] Maxim Pospelov and Adam Ritz. Theta vacua, qcd sum rules, and the neutron electric dipole moment. *Nuclear Physics B*, 573(1-2):177–200, May 2000.
- [8] J. Silk et al. *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [9] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, New York, 1972.